المحاضرة السابعة

2.2.6.3: <u>التوزيع الطبيعي :</u>

يعد التوزيع الطبيعي من أهم التوزيعات الاحتمالية لما له من تطبيقات مهمة في مجال الإحصاء، إذ يستخدم هذا التوزيع في كثير من المسائل التطبيقية .

1. يستخدم التوزيع الطبيعي في وصف كثير من المتغيرات العشوائية إذ نلحظ أن عدداً كبيراً من المتغيرات العشوائية (من أطوال ، أوزان ، ...إلخ) التي نواجهها في حياتنا العامة لها منحني كثافة ، أو منحني تكرار ، له تقريباً شكل الجرس ، أو كما نعبر عن ذلك إحصائيا ، له بصورة تقريبية شكل منحني التكرار الطبيعي ، أو شكل التوزيع الطبيعي.

إذا كان منحني تكرار (كثافة) مجموعة قياسات لها شكل التوزيع الطبيعي فإن معظم القياسات تتركز حول القيمة الحقيقية التي تشكل المتوسط أو قريبة منها.

2. يعتبر التوزيع الطبيعي تقريباً جيداً و مفيداً بكثير من التوزيعات الاحتمالية.

3. يؤدِّي دوراً مهمّاً ، بل يعد حجر الزاوية في الاستدلال الإحصائي.

تعريف:

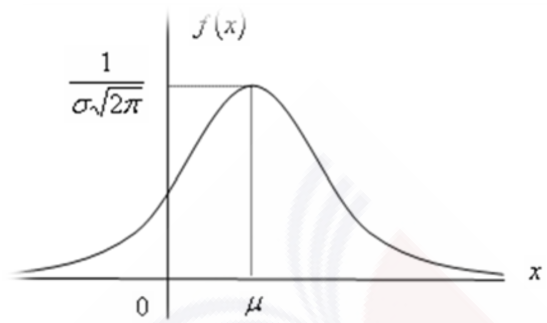
نقول إن للمتغير العشوائي X التوزيع الطبيعي بالوسيطين μ و σ^2 ونعبر عن ذلك بالرمز $X\sim N(\mu\ ,\sigma^2)$ إذا كانت كثافته الاحتمالية:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma.\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad ; -\infty < x < +\infty$$

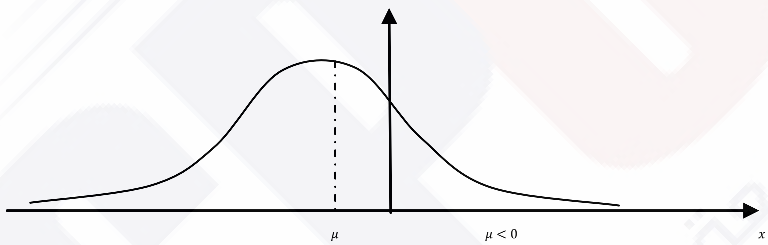
$$\sigma > 0 \ \ ; \ -\infty < \mu < +\infty$$

ينتج من تعريف هذه الكثافة :

- أنها تبلغ قيمتها العظمى عند $x = \mu$ وتساوي هذه القيمة العظمى $\frac{1}{\sigma.\sqrt{2\pi}}$.
- المنحني البياني لهذه الكثافة متناظر بالنسبة للمستقيم $x = \mu$
- عندما $x \to \mp\infty$ فإنّ $f(x) = 0$
- لمتوسط ووسط ومنوال التوزيع الطبيعي القيمة نفسها μ
- المنحني البياني لهذه الكثافة له الشكل :



μ>0



- <u>**التوقع الرياضي والتباين :**</u>

$$E(X) = \mu \quad , \quad V(X) = \sigma^2$$

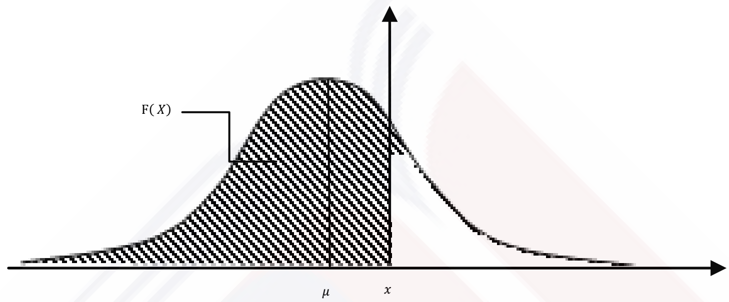
أي أن وسيطي التوزيع الطبيعي μ و σ^2 هما التوقع الرياضي والتباين لـX على الترتيب.

<u>**دالة التوزيع :**</u>

$$P(X \le x) = F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{dt} = \frac{1}{\sigma.\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{\frac{-1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2} dt$$

وهي تساوي القسم المظلل في الشكل الآتي:

وهي تمثل $P(\mathrm{X} \le x)$



من الواضح $F(\mu) = \frac{1}{2}$ (لماذا ؟)

2.2.6.3 دالة الكثافة ودالة التوزيع المعيارية:

<u>تعريف:</u> نقول إنّ للمتغير العشوائي Z التوزيع الطبيعي المعياري إذا كان $Z \sim N(0,1)$، أي إذا كان لـ Z الكثافة الاحتمالية:

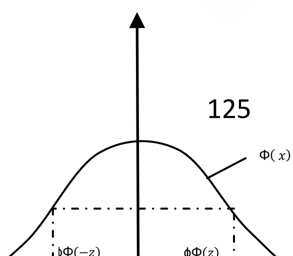
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}x^2} \qquad ; \; -\infty < x < +\infty$$

ومِنْ ثَمَّ دالة التوزيع:

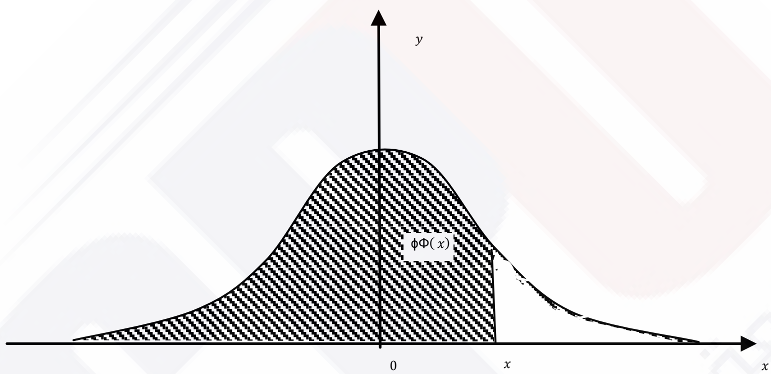
$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}t^2}\, dt$$

سنرمز لدالة الكثافة الاحتمالية في هذه الحالة بـ $\varphi(x)$ بدلاً من $f(x)$ ولدالة التوزيع بـ $\Phi(x)$ بدلاً $F(x)$.

أي إذا كان $Z \sim N(0,1)$ فإن كثافته $\varphi(x)$ ودالة توزيعه $\Phi(x)$



التمثيل البياني لكثافة التوزيع الطبيعي المعياري(بسبب التناظر)($\Phi(-z) = 1 - \phi(z)$)



منحني كثافة التوزيع الطبيعي المعياري والمساحة المظللة$\phi(z)$

تمثل المساحة المظللة $\Phi(z)$ الاحتمال $P(Z \leq z)$ ومن الواضح أن $\Phi(0)=\frac{1}{2}$

إنّ حساب قيم دالة التوزيع للمتغير الطبيعي المعياري غير ممكنة تحليلاً ، وقد أعدّ جدول يعطي قيم دالة التوزيع $\phi(t)$ من أجل قيم t من عند النقطة $x = 0$ حتى النقطة $x = 3.5$ بفاصل 0.01 بين كل قيمة والقيمة التي تليها.

- **<u>جدول التوزيع الطبيعي المعياري وطريقة استخدامه:</u>**

إنّ هذه الجدول يعطي قيم دالة التوزيع $\Phi(z)$ ابتداءً من الصفر وبفاصل 0.01 بين كل قيمة والقيمة التي تليها . وقد وضعت z ابتداءً من -3.4 وبفاصل 0.1

في العمود الأيسر، ووضعت المنزلة العشرية الثانية من قيمة z في السطر الرأسي، ومقابل كل قيمة في العمود الأيسر هناك سطر يمكن تسميته بهذه القيمة وتحت كل قيمة من قيم المنزلة العشرية الثانية هناك عمود يمكن تسميته بالقيمة التي تقع فوقه. أما قيم المساحات ، أي قيم الدالة $\Phi(z)$ فقد وضعت في صلب الجدول وكل منها ملتقى سطر مع عمود.

مثال (38.3):

إذا كان $Z \sim N(0,1)$ أوجد $P(Z < 2.56)$ و $P(1 < Z < 1.33)$ و $P(Z > 1.84)$ و $P(Z < -1.36)$

الحل :

إنّ $P(Z < 2.56) = \Phi(2.56)$ و باستخدام جدول التوزيع الطبيعي نجد أنّ قيمة $\Phi(z)$ عند ملتقى السطر 2.5 والعمود 0.06 هي 0.9948

بأسلوب مشابه نجد:

$$\mathrm{P}(1 < Z < 1.33) = \mathrm{P}(\mathrm{Z} < 1.33) - \mathrm{P}(\mathrm{Z} \leq 1) = \Phi(1.33) - \Phi(1)$$
$$= 0.9082 - 0.8413 = 0.0669$$

وكذلك نجد:

$$\mathrm{P}(\mathrm{Z} > 1.84) = 1 - \mathrm{P}(\mathrm{Z} \leq 1.84) = 1 - \phi(1.84)$$
$$= 1 - 0.9671 = 0.0329$$
$$\mathrm{P}(\mathrm{Z} < -1.36) = \phi(1.36) = 0.0869$$

<u>ملاحظة:</u> يمكن استخدام جدول دالة التوزيع الطبيعي بشكل عكسي كما في المثالين الآتيين:

مثال (39.3) :

إذا كان $Z \sim N(0,1)$ وكان لدينا $P(Z < a) = 0.8289$ فإننا نبحث عن القيمة 0.8289 ، وسنجد بأنّ هذه القيمة تقع عند السطر 0.9 والعمود 0.05 ، إذن قيمة a هي 0.95 أي : $a = 0.95$

مثال (40.3) :

إذا كان $Z \sim N(0,1)$ ، أوجد قيمة الثابتين الحقيقيين a و **c** حيث

$P(Z < a) = 0.5$ و $P(Z < c) = 0.2061$

الحل:

إنّ $P(Z < a) = 0.5$ يعني $\Phi(a)=0.5$ ومِنْ ثَمَّ $a = 0$

أما $P(Z < c) = 0.2061$ يعني أنَّ $\Phi(c) = 0.2061$ ، ولو حاولنا البحث عن القيمة 0.2061 داخل جدول التوزيع الطبيعي المعياري لوجدنا أن:

$$c = -0.82$$

3.2.6.3 مبرهنات مهمّة جداً:

مبرهنة(1):

إذا كان لـ X التوزيع الطبيعي $N(\mu, \sigma^2)$ فإنه يكون للمتغير العشوائي $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ التوزيع الطبيعي المعياري ، أي:

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$$

ملاحظة:

لقد بَيّنّا في الأمثلة السابقة طريقة إيجاد قيم الدالة $\Phi(z)$ أي الاحتمالات المتعلقة بالمتغير الطبيعي المعياري z والآن لنبين طريقة إيجاد الاحتمالات المتعلقة بالمتغير العشوائي X الذي يتوزع وفق التوزيع الطبيعي $N(\mu, \sigma^2)$ ولكي نتمكن

من حساب الاحتمالات المتعلقة بـ X يجب معرفة قيمتي الوسيطين μ و σ^2 وعند معرفتنا للوسيطين يصبح الأمر في غاية السهولة إذ نقوم بمعايرة X .

أي نكتب : $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$

ثم نحوّل العبارة الاحتمالية المتعلقة بـ X إلى عبارة احتمالية مكافئة بدلالة z، ثم نعود إلى جدول التوزيع الطبيعي المعياري الذي تدربنا قبل قليل على طريقة استخدامه.

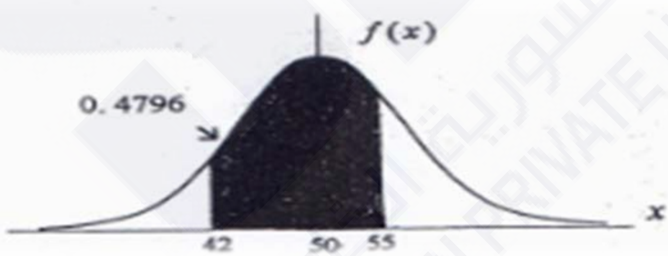
مثال(41.3) :

إذا كان X متغيراً عشوائياً له التوزيع N(50,100) . فأوجد قيمة الاحتمال:

$$\mathrm{P}[42 < X < 55]$$

الحل:

نقوم بمعايرة المتغير العشوائي X ونفرض $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ ثم نعين قيمتي Z المقابلتين للقيمتين $x_1 = 42$ و $x_2 = 55$



$$z_1 = \frac{x_1-\mu}{\sigma} = \frac{42-50}{10} = -0.8$$
$$z_2 = \frac{x_2-\mu}{\sigma} = \frac{55-50}{10} = 0.5$$

ومِنْ ثَمَّ يكون :

$$P[42 < X < 55] = P[-0.8 < Z < 0.5]$$
$$= P[Z < 0.5] - P[Z < -0.8] = 0.6915 - 0.2119 = 0.4796$$

مثال (42.3):

إذا كان X متتغيراً عشوائياً له التوزيع $N(10,16)$ فأوجد قيمة x بحيث يكون $P[X < x] = 0.9980$

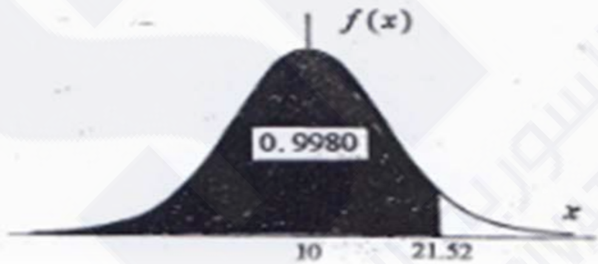
الحل:

نقوم بمعايرة x ونفرض : $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$

أما قيمة z الموافقة لـ x فهي : $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$

ثم نعين z بحيث يكون : $P[X < x] = P[Z < z] = 0.9980$

ولوعدنا إلى جدول التوزيع الطبيعي المعياري لوجدنا أن قيمة z الموافقة للقيمة 0.9980 هي $z = 2.88$



ثم نعين x من العلاقة: $z = \frac{x-\mu}{\sigma} = \frac{x-10}{4} = 2.88$

ومنه نجد : $x = 4(2.88) + 10 = 21.51$

مثال(43.3): إذا كان X متغيراً عشوائياً طبيعياً متوسطه $\mu = 40$ وانحرافه المعياري $\sigma = 6$ أوجد قيمة:

1. a التي يقع على يسارها 45% من المساحة تحت منحني تابع الكثافة.

2. b التي يقع على يمينها 14% من المساحة تحت منحني تابع الكثافة.

الحل:

1) لنعين قيمة a بحيث يكون :

$$\mathrm{F}(a) = P[X < a] = 0.45$$

وبالتحويل للطبيعي المعياري نجد :

$$P\left[\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{\alpha-40}{6}\right] = P[Z < z] = 0.45$$

حيث:
$$z = \frac{\alpha-40}{6}$$

ومن جدول التوزيع الطبيعي المعياري نجد قيمة z الموافقة للقيمة 0.45 هي $z = -0.13$ ومنه فإن :

$$\alpha = 6(z) + 40 = 6(-0.13) + 40 = 39.22$$

2) نعين قيمة b بحيث يكون :

$$P[X > b] = 0.14$$

ومنه :

$$P[X < b] = 1 - 0.14 = 0.86$$

وبالتحويل للطبيعي المعياري نجد :

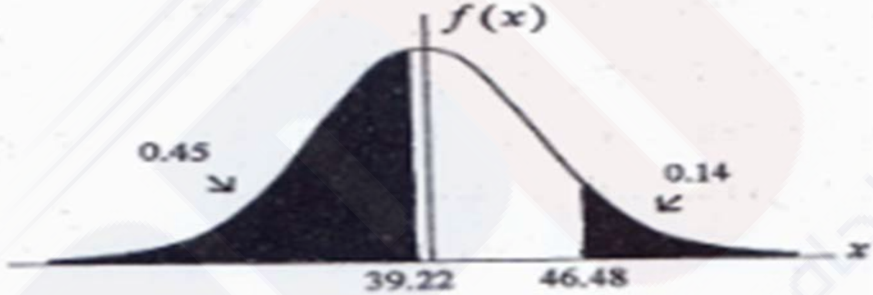
$$\mathrm{P}\left[\frac{\mathrm{X}-\mu}{\sigma} < \frac{\mathrm{b}-40}{6}\right] = \mathrm{P}[\mathrm{Z} < z] = 0.86$$

حيث:

$$z = \frac{b-40}{6}$$

ومن جدول التوزيع الطبيعي المعياري نجد قيمة z الموافقة للقيمة 0.86 هي $z = 1.08$ ومنه فإن :

$$z = 1.86 = \frac{b-40}{6} \Rightarrow b = 46.48$$



مثال (44.3):

إذا فرضنا أن طول الشخص متغير عشوائي يخضع للتوزيع الطبيعي بمتوسط $\mu = 175\ c.m$ وانحراف معياري $\sigma = 7.5\ c.m$ فكيف يحدد مهندس ارتفاع أبواب الغرف في منزل يقوم بتصميمه بحيث لا يضطر أكثر من 2% من الأشخاص إلى تخفيض رؤوسهم عند الدخول وعند الخروج .

الحل:

إذا دل X على طول الشخص فإن:

$$X \sim N(175,56.25)$$

فإذا فرضنا أن ارتفاع الباب هو $a\ c.m$ فيكون المطلوب تحديد قيمة a بحيث يكون:

$$P(X > a) \leq 0.02$$

ولكن :

$$\mathrm{P}(\mathrm{X} > a) = 1 - \mathrm{P}(\mathrm{X} < a)$$

$$= 1 - \Phi\left(\frac{a-175}{7.5}\right) \leq 0.02$$

ومِنْ ثَمَّ نعين a بحيث يكون :

$$\Phi\left(\frac{a-175}{7.5}\right) \geq 0.98$$

ولكن من جدول التوزيع الطبيعي المعياري نجد:

$$0.98 = \Phi(2.06)$$

إذن نعين a بحيث يكون : $\Phi\left(\frac{a-175}{7.5}\right) \geq \Phi(2.06)$

$$\Rightarrow \frac{a-175}{7.5} \geq 2.06$$ (Φ دالة متزايدة)

$$\Rightarrow a \geq 190.45\ c.m$$

مثال (45.3):

في بستان للبرتقال متوسط وزن الثمرة 19.3 أونزة بانحراف معياري 2.3 أونزة. مفترضاً أنّ وزن الثمرة متغير عشوائي X يتبع التوزيع الطبيعي ، احسب:

أ- نسبة الثمار التي يقل وزنها عن *18* أونة.

ب- نسبة الثمار التي لا يقل وزنها عن *20* أونزة.

ت- نسبة الثمار التي يتراوح وزنها بين 18.5 و 20.5 أونزة.

ث- الوزن الذي سيقل عنه 15% من الثمار.

ج- الوزن الذي سيزيد عليه 25% من الثمار.

الحل:

أ-
$$\mathrm{P}[\mathrm{X} < 18] = \mathrm{P}\left[\frac{\mathrm{X}-\mu}{\sigma} < \frac{18-19.3}{2.3}\right] = \mathrm{P}[\mathrm{Z} < \frac{-1.3}{2.3}]$$

$$= P[Z < -0.57] = 0.2843$$

ب-
$$P[\mathrm{X} \geq 20] = P\left[\frac{X-\mu}{\sigma} \geq \frac{20-19.3}{2.3}\right] = P\left[Z \geq \frac{0.7}{2.3}\right]$$

$$= P[Z \geq 0.30]$$

$$= 1 - P[Z < 0.30] = 1 - 0.6179 = 0.3821$$

أي إنّ نسبة الثمار التي لا يقل وزنها عن 20 أونزة 38.21%.

ت-

$$P[18.5 < X < 20.5] = P\left[\frac{18.5-19.3}{2.3} < \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{20.5-19.3}{2.3}\right]$$

$$= P(-0.35 < Z < 0.52) = P[\mathrm{Z} < 0.52] - P[\mathrm{Z} < -0.35]$$

$$= 0.6985 - 0.3632 = 0.3353$$

أي إن نسبة الثمار التي يتراوح وزنها بين 18.5 و 20.5 أونزة هي 33.35%

ث- بفرض أنّ الوزن الذي سيقل عنه 15% من الثمار هو a فيكون:

$$P[X < a] = 0.15 \Rightarrow P\left[\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{a-19.3}{2.3}\right] = 0.15$$

$$\Rightarrow \Phi\left(\frac{a-19.3}{2.3}\right) = 0.15 \Leftrightarrow \frac{a-19.3}{2.3} = -1.04$$

$$a = 19.3 - (2.3)(1.04)$$

$$a = 16.9$$

أي إنّ نسبة الثمار التي يقل وزنها عن 16.908 أونزة تساوي 15% .

ج- بفرض أن الوزن الذي سيزيد عليه 25% من الثمار هو b فيكون:

$$P[X > b] = 0.25 \Leftrightarrow \frac{b-19.3}{\sigma} = 0.67$$

$$b = (2.3)(0.67) + 19.3 = 20.841$$

هذا يعني أن نسبة الثمار التي يزيد وزنها على 20.841 تساوي 25%.

<u>مبرهنة (2):</u> إذا كانت $X_1, X_2, \dots, X_n$ متتالية من المتغيرات العشوائية المستقلة، التي لكل منها التوزيع الطبيعي $N(\mu, \sigma^2)$ نفسه ، فإنه يكون للمتغير العشوائي :

$$Y_1 = \sum_{i=1}^{n} X_i = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

التوزيع الطبيعي $N(n\mu, n\sigma^2)$

لاحظ أن $V(Y_1) = n\sigma^2, E(Y_1) = n\mu$

ويكون للمتغير العشوائي $Y_2 = \bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$ التوزيع الطبيعي $N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$

ومِنْ ثَمّ فإنه يكون للمتغير العشوائي $\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}$ التوزيع الطبيعي المعياري، ويكون للمتغير العشوائي:

$$Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$$

أي له التوزيع الطبيعي المعياري أيضاً.

<u>**تعريف:**</u> نسمي كل متتالية من المتغيرات العشوائية المستقلة $X_1, X_2, \dots, X_n$ التي لكل منها دالة التوزيع $F(x)$ نفسه ، عينة عشوائية حجمها n مأخوذة من المجتمع $F(x)$.

(على الطالب فهم هذا التعريف بشكل لا لبس فيه).

مثال(46.3):

بفرض أنّ أوزان الأشخاص الذين يستخدمون مصعداً معيناً تتوزع وفق التوزيع الطبيعي $N(80,100)$، والحد الأعلى المسموح به لحمولة المصعد هو 350 كغ.

أ. بصورة عشوائية يجتمع أربعة أشخاص في المصعد. ما احتمال تجاوز الحمولة القصوى؟

ب. بصورة عشوائية هناك شخص واحد في المصعد ومعه أمتعة تزن ثلاثة أمثال وزنه، ما احتمال تجاوز الحمولة القصوى؟

الحل:

أ. بفرض أنّ أوزان الأشخاص الأربعة هي X_1, X_2, X_3, X_4 فتكون هذه الأوزان مستقلة و $X_i \sim N(80,100)$; $(i=1,2,3,4)$

ويكون الاحتمال المطلوب:

$$P[X_1 + X_2 + X_3 + X_4 > 350] = P(\sum_{i=1}^{4} X_i > 350)$$

ولكن $\sum_{i=1}^{4} X_i \sim N(320,400)$ ، وبالتالي يمكننا أن نكتب:

$$P(\sum_{i=1}^{4} X_i > 350) = P\left(\frac{\sum_{i=1}^{4} X_i - 320}{20} > \frac{350-320}{20}\right)$$

$$= P\left(Z > \frac{3}{2}\right) = 1 - P(Z \leq 1.5) = 1 - \Phi(1.5)$$

$$= 1 - 0.9332 = 0.0668$$

ب. إذا رمزنا لوزن الشخص بـ X فيكون وزن الأمتعة $3X$ ، ويكون الاحتمال المطلوب:

$$P(4X > 350) = P(X > 87.5) = P\left(\frac{X-\mu_X}{\sigma_X} > \frac{87.5-80}{10}\right)$$
$$= P(Z > 0.75) = 1 - \Phi(0.75) = 1 - 0.7734 = 0.2266$$

مثال(47.3):

في عيادة أحد الأطباء عشرون مراجعاً، وقد بدأ باستقبالهم في الخامسة مساءً. ففي أي ساعة سيكون واثقاً 99% بأنه سينتهي عمله، إذا كان يعلم من خبرته السابقة أن أزمنة مقابلة المرضى تتوزع توزعاً طبيعياً بتوقع $\mu = 10$ دقيقة وبانحراف معياري 3 دقائق.

الحل: ليكن X المتغير الدال على أزمنة مقابلة المرضى عندئذ :

$X \sim N(\mu = 10, \sigma^2 = 9)$ ومن أجل $n = 20$ مريضاً فإن :

$$Y = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim N(n\mu, n\sigma^2) = N\big((20)(10); (20)(9)\big)$$

$$Y \sim N(200,180)$$

فلحساب الزمن y اللازم لمقابلة 20 مريضاً وبثقة 0.99 يحتسب:

$$p[Y \leq y] = 0.99 \Rightarrow P\left[\frac{Y-\mu_Y}{\sigma_Y} \leq \frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right] = 0.99$$

$$\Rightarrow p\left[Z \leq \frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right] = 0.99 \;\Rightarrow \frac{y-\mu_y}{\sigma_y} = 2.33 \;\left(\text{من الجدول}\right)$$

$$y = (2.33)(\sigma_y) + \mu_y = (2.33)(\sqrt{180}) + 200 = 231.23 \text{ دقيقة}$$

أي يلزمه 231.23 دقيقة وهذا يساوي : 3 ساعات و 51 دقيقة ، وستكون نهاية العمل في الساعة:

$$\left(\text{51 دقيقة}\right) + \left(\text{الساعة 8}\right) = \left(\text{51 دقيقة}\right) + \left(\text{3 ساعات}\right) + \left(\text{الساعة الخامسة}\right)$$

4.6.3 القاعدة التجريبية (قاعدة الـ σ 3) :

نبيّن من خلال المبرهنة الآتية ما يعنيه الانحراف المعياري σ للتوزيع الطبيعي.

مبرهنة (3): إذا كان $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ فإنّ:

1) $P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) = 0.6826$

أي إن نسبة القياسات الواقعة داخل المجال $[\mu - \sigma, \mu + \sigma]$ لا تقل عن 68.28% (يجب توضيح ذلك بشكل دقيق للطلاب من خلال الأمثلة).

2) $P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) = 0.9544$

أي إن نسبة القياسات الواقعة داخل المجال $[\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma]$ لا تقل عن 95.44%

3) $P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) = 0.9974$

أي إن نسبة القياسات الواقعة داخل المجال $[\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]$ لا تقل عن 0.9974%

- **الإثبات:**

1) إثبات (1):

$$P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) = P\left(-1 \leq \frac{X-\mu}{\sigma} \leq +1\right)$$

$$= P(-1 \leq Z \leq +1)$$

$$= P(Z \leq +1) - P(Z < -1) = \phi(+1) - \phi(-1)$$

$$= \Phi(+1) - \left[1 - \Phi(1)\right] = 2\Phi(1) - 1 = 2(0.8413) - 1$$

$$= 1.6826 - 1 = 0.6826$$

وبالأسلوب نفسه نثبت صحة (2) و(3) . (يترك ذلك تمريناً للقارئ).

إنّ استخدام مضمون هذه المبرهنة يصدر لنا قاعدة تجريبية لتحديد كون قياسات المجتمع المدروس (من خلال القيم التي يأخذها متغير عشوائي ما) هي من مجتمع طبيعي أم لا . لأجل ذلك نعد قيم هذا المجتمع هي قيم لمتغير عشوائي X متوسطه μ وتباينه σ^2 مجهولان ، ثم نحسب متوسط هذه القيم ، وليكن $\bar{x}$ والانحراف المعياري لهذه القيم وليكن s (نعد $\bar{x}$ قيمة تقريبية لـ μ ونعد s قيمة تقريبية لـ σ ثم نحسب نسبة القياسات الواقعة ضمن المجالات:

$$[\bar{x} - s, \bar{x} + s]$$

و $$[\bar{x} - 2s, \bar{x} + 2s]$$

و $$[\bar{x} - 3s, \bar{x} + 3s]$$

ونقارن هذه النسب مع النسب المعطاة في هذه المبرهنة، فإذا كانت قريبة منها بشكل مقبول قلنا : إنّ هذا المجتمع الذي أخذت منه القياسات هو مجتمع طبيعي متوسطه $\mu = \bar{x}$ وتباينه $\sigma^2 = s^2$ وتسمى القاعدة السابقة (اختبار كون المجتمع طبيعياً) بقاعدة الـ 3σ .

ملاحظة (2):

إنّ المبرهنة السابقة تعني أنّ نسبة القياسات الواقعة خارج المجال $[\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]$ هي 0.26% ، مما يعني أن نسبة القياسات التي تزيد على $\mu + 3\sigma$ هي 0.13% وأنّ نسبة القياسات التي تقل عن $\mu - 3\sigma$ هي 0.13%، وذلك بسبب تناظر منحني الكثافة الطبيعية حول المستقيم $x = \mu$.

ولو تأملنا في جدول التوزيع الطبيعي المعياري لوجدنا $\phi(3.49) = 0.9998$ بما أنّ الدالة $\Phi(z)$ متزايدة (لماذا ؟) ، فهذا يسمح لنا ، ولو بشكل تقريبي عدّ قيم $\Phi(z) = 1$ من أجل جميع قيم $z \geq 3.60$ ، وكذلك $\Phi(z) = 0$ من أجل جميع قيم $z \leq 3.60$